Ejercicios de Estadística para Ingenieros
Profesor: Angel Francisco Arvelo L.

Estimación de parámetros

Resuelva los Ejercicios: 8.1 hasta 8.8 del texto

1º) Considere una variable X con distribución normal de media "μ" conocida, y varianza "σ^2" desconocida.
Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$, una muestra aleatoria proveniente de "X".
a) Obtenga el estimador máximo verosímil de "σ^2".
b) Analice si este estimador es insesgado.
c) ¿Cuál estimador es mejor para "σ^2", el máximo verosímil obtenido anteriormente ó S^2 ?

Solución : a) $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i - \mu)^2}{n}$; b) es insesgado c) El anterior es mejor

2º) Se tienen dos muestras independientes de tamaños n_1 y n_2, para una misma población normal de parámetros "μ" y "σ^2", ambos desconocidos.
Suponga que $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ representan sus medias muestrales, mientras que S_1^2 y S_2^2 sus varianzas muestrales, respectivamente.
Se propone como estimador de "μ" a la media ponderada de las medias muestrales, es decir: $\hat{\mu} = \omega\,\overline{X}_1 + (1-\omega)\,\overline{X}_2$; donde "ω" es el factor de ponderación.
a) Demuestre que para cualquier valor de "ω" , este estimador es insesgado.
b) ¿Cuál es el mejor valor para "ω"?
c) Para el caso $n_1 = 6$, $n_2 = 10$, y usando el mejor valor de "ω"¿Cuál es la probabilidad de cometer un error mayor que $\frac{1}{8}\sigma$ en la estimación de "μ"?.
d) Demuestre que : $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ es un estimador insesgado para σ^2
.

Solución: b) $\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$

3º) Una variable aleatoria continua "X" que siga la distribución gamma, tiene por función de densidad: $f(x) = \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}$; $x > 0$, donde "λ" y "r" son ambos parámetros positivos.
Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$, una muestra aleatoria proveniente de "X".
a) Aplique el método de máxima verosimilitud y el método de momentos, suponiendo que "r" es conocido, para obtener el estimador de "λ".
b) Para el caso en que ambos parámetros son desconocidos, aplique de nuevo estos mismos dos métodos para obtener sus estimadores.

a) $\hat{\lambda} = \frac{r}{\overline{X}}$ por ambos métodos ; b) $\hat{\lambda} = \frac{n\,\overline{X}}{(n-1)\,S^2}$; $\hat{r} = \frac{n\,\overline{X}^2}{(n-1)\,S^2}$; por momentos

4°) El estimador máximo verosímil para σ^2 en una normal , cuando también se desconoce "μ" es: $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(X_i - \overline{X})^2}{n}$

a) Encuentre el sesgo de este estimador.
b) Demuestre que es consistente en media cuadrática.

Solución : a) $-\frac{\sigma^2}{n}$

5º) Considere una variable aleatoria "X" ,con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = (\theta - 1)\, x^{\theta-2} \; ; \quad 0 < x < 1 .$$

y una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ proveniente de "X".

a) ¿ Es $\hat{\theta} = 1 - \overline{X}$, un estimador insesgado para el parámetro "θ"?
b) Obtenga el estimador de θ por el método de momentos .
c) Obtenga el estimador de θ por el método de máxima verosimilitud.

6º) Si $X_1, X_2, \ldots, X_6$, es una muestra aleatoria de una variable normal de media "μ", y varianza σ^2, ambos desconocidos.

a) Determinar la constante "C" de forma que:

$$\hat{\sigma}^2 = C\,[\,(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2\,]$$

sea un estimador insesgado de σ^2.

b) ¿Cuál es mejor, ese estimador ó S^2 ?

Solución : a) $C = \frac{1}{6}$. b) Es mejor S^2

7°) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$, una muestra aleatoria proveniente de una variable aleatoria "X", con función de densidad: $f(x) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}$; $0 < x < \theta$

Considere los estimadores de la forma : $\hat{\theta} = C\,\overline{X}$ donde "C" es una constante.
¿Para qué valor de "C" el estimador es insesgado ?
Solución : C = 3 .